Facultad de Matemáticas e Ingenierías
Matemáticas
Cálculo integral
Taller integrales trigonométricas

Nombre de Estudiante: ______________________________Cod:________Fecha: ______

**Taller**

Revise detenidamente la información de las siguientes páginas antes de realizar los ejercicios.

1. $\int sen^5 x\, dx$
2. $\int sen^5 \frac{x}{2}\, dx$
3. $\int cos^3 x\, dx$
4. $\int 3cos^5(3x)\, dx$
5. $\int 8sen^4 x\, dx$
6. $\int \sqrt{\frac{1-cosx}{2}}\, dx$
7. $\int \sqrt{1-\cos(2x)}\, dx$
8. $\int \sqrt{sec^2(x)-1}\, dx$ Use una identidad trigonométrica para eliminar fácilmente la raíz cuadrada. Luego exprese la función en términos de senos y cosenos para plantear posteriormente una sustitución.

Elaborado por: *Alejandra Torres*

## Integrales trigonométricas

Podemos usar identidades trigonométricas para integrar ciertas combinaciones de funciones.

**Productos de potencias de Senos y Cosenos**

$$\int \boldsymbol{sen^m x \;\; cos^n x \; dx}$$

Donde m y n son enteros no negativos.

La primera intuición al ver este tipo de integrales probablemente sea usar sustitución; sin embargo, no será muy útil sin antes realizar unos ajustes. Estos ajustes dependerán de la paridad de las potencias.

**Caso 1. Alguna de las potencias es impar:**

- Si **m (la potencia del seno) es impar**, entonces se puede escribir como m=2k+1, de donde:

$$sen^m x = sen^{2k} x \; senx$$

$$= (sen^2 x)^k \; senx$$

Posteriormente, se utiliza la identidad fundamental $\boldsymbol{sen^2 x + cos^2 x = 1}$**,** obteniendo así:

$$\boxed{\boldsymbol{sen^m x = (1 - cos^2 x)^k \; senx}}$$

Al reemplazar lo obtenido en la integral, podemos agrupar $senx$ con $dx$, y plantear una sustitución con $\boldsymbol{u = cosx}$ (ver ejemplo 1)

- Si **n (la potencia del coseno) es impar**, se sigue la misma idea anterior, obteniendo:

$$cos^n x = cos^{2k+1} x = (cos^2 x)^k \; cosx = (1 - sen^2 x)^k \; cosx$$

$$\boxed{\boldsymbol{cos^n x = (1 - sen^2 x)^k \; cosx}}$$

Al reemplazar lo obtenido en la integral, podemos agrupar $cosx$ con $dx$, y plantear una sustitución con $\boldsymbol{u = senx}$ (ver ejemplo 2)

**Caso 2. Las dos potencias son pares:**
En este caso la estrategia anterior no sirve, se recomienda entonces utilizar las identidades del ángulo doble (ver ejemplo 3):

$$\boxed{sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)} \qquad \boxed{cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)}$$

**Ejemplo 1 potencia de seno impar***:*

$$\int sen^3x\, cos^2x\, dx = \int sen^2x\, senx\ \ cos^2x\, dx$$
$$= \int (1 - cos^2x)\, cos^2x\, senx\, dx$$

Usando la sustitución $u = cosx$ y $du = -senxdx$, de donde $(-1)du = senxdx$

$$= \int (1 - u^2)\, u^2(-1)\, du$$
$$= \int (u^2 - u^4)(-1)\ \ du$$
$$= \int u^4 - u^2\ \ du$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$$

Regresando la sustitución se obtiene:

$$= \frac{cos^5x}{5} - \frac{cos^3x}{3} + C.$$

**Ejemplo 2 potencia de coseno impar***:*

$$\int\ cos^5x\, dx = \int\ cos^4x\, cosx\, dx$$
$$= \int\ (cos^2x)^2\, cosx\, dx$$
$$= \int\ (1 - sen^2x)^2\, cosx\, dx$$

Usando la sustitución $u = senx$ y $du = cosxdx$:

$$= \int\ (1 - u^2)^2\, du$$
$$= \int\ 1 - 2u^2 + u^4\, du$$
$$=\ u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} + C$$

Regresando la sustitución se obtiene:

$$=\ senx - \frac{2}{3}sen^3x + \frac{sen^5x}{5} + C.$$

**Ejemplo 3 dos potencias pares***:*

*(Este ejemplo es particularmente largo, por favor procure comprender la estructura general del ejercicio)*

$$\int sen^2x\, cos^4x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - cos2x)\left[\frac{1}{2}(1 + cos2x)\right]^2 dx$$

Elaborado por: *Alejandra Torres*

$$=\frac{1}{8}\int(1-cos2x)(1+cos2x)^2dx$$
$$=\frac{1}{8}\int(1-cos2x)(1+2cos2x+cos^22x)dx$$
$$=\frac{1}{8}\int 1+2cos2x+cos^22x-cos2x-2cos^22x-cos^32x\,dx$$
$$=\frac{1}{8}\int 1+cos2x-cos^22x-cos^32x\,dx$$

Los dos primeros sumandos ya se pueden integrar, en el taller anterior se vio que $\int cos2x\,dx=\frac{1}{2}sen2x+c$

Se omitirá la constante de integración hasta el resultado final

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}sen2x\right)-\frac{1}{8}\int cos^22x+cos^32x\,dx$$

- Para el término que incluye a $\cos^2 2x$ , se vuelve a aplicar el método para potencias pares, haciendo el cambio: $cos^2x=\frac{1}{2}(1+cos2x)$, por lo que:

$$\int cos^22x\,dx=\frac{1}{2}\int(1+cos4x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}sen4x\right)$$

- Para el término $cos^32x$, se aplica el método de potencias impares, luego:

$$\int cos^32x\,dx=\int(1-sen^22x)cos2x\,dx$$

$u\ =\ sen\,2x$
$du=2cos2xdx$

$$=\frac{1}{2}\int(1-u^2)du=\frac{1}{2}\left(sen2x-\frac{1}{3}sen^32x\right)$$

Por lo tanto la integral da como resultado:

$$\int senx^2\cos^4x\,dx=\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}sen2x\right)-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}sen4x\right)+\frac{1}{2}\left(sen2x-\frac{1}{3}sen^32x\right)\right]$$

Simplificando todo se tiene:

$$\int senx^2\cos^4x\,dx=\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}sen4x+\frac{1}{3}sen^32x\right)+C$$

Elaborado por: *Alejandra Torres*

**Eliminación de Raíces Cuadradas:**

Solución de integrales de los tipos

$$\int \sqrt{1 \pm cos2x}dx \quad \text{o} \quad \int \sqrt{\frac{1 \pm cos2x}{2}}dx$$

Para este tipo de integrales, use las identidades del ángulo doble ya presentadas en el **caso 2** del tema anterior.

**Ejemplo 4. Eliminación de raíces**

En el siguiente ejemplo se utiliza la identidad $cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$, para eliminar la raíz cuadrada

$$\int \sqrt{1 + cos4x}dx$$

Para eliminar la raíz cuadrada se utiliza la identidad

$$cos^2x = \frac{1 + cos2x}{2} \qquad o\ lo\ que\ es\ equivalente: \qquad 1 + cos2x = 2\ cos^2x$$

Luego la expresión dentro del radical quedaría:

$$1 + cos4x = 2\ cos^2 2x$$

Por lo tanto,

$$\int \sqrt{1 + cos4x}dx = \int \sqrt{2\cos^2 2x}\, dx = \int \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\, dx$$

$$= \sqrt{2} \int cos2x\ dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, sen2x}{2} + c$$